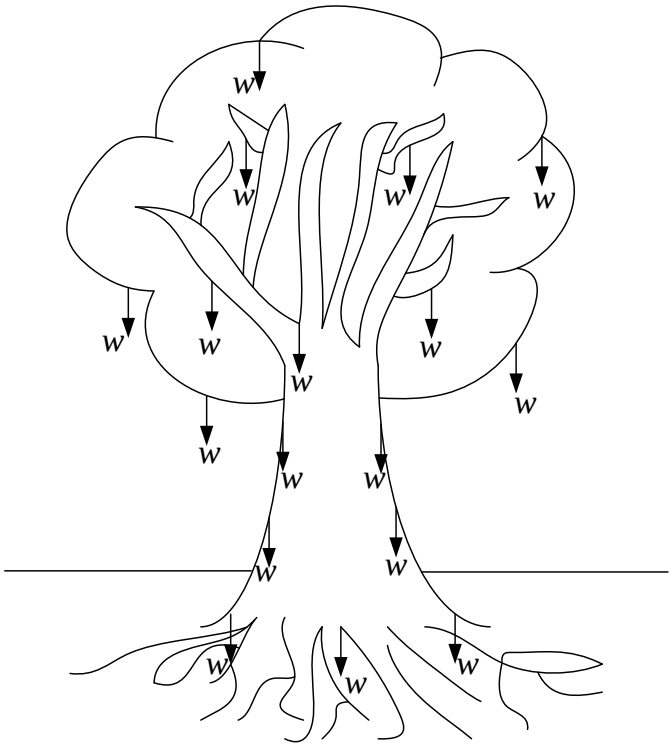
مبحث هجدهم (مثال درخت در حالت بدون وزش باد)

با توجه به مباحث جلسه‌های قبل به دو رابطه برای نیرو و گشتاورنیرو برای یک جسم رسیدیم. از این روابط می‌توانیم به دو طریق استفاده کنیم. یا این روابط را برای مشخص کردن تکلیف یک جسم می‌نویسیم و یا تکلیف جسم مشخص است و می‌خواهیم بررسی کنیم این روابط چگونه حاکم و قابل توجیه هستند. در فیزیک ما از هر دو مسیر استفاده می‌کنیم.

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که برای یک درختی که ساکن ایستاده است این روابط به چه صورت هستند.
نیروی وزن که همان حاصل‌ضرب جرم در شتاب سقوط آزاد است از طرف زمین به تک‌تک اجزای این درخت به سمت پایین وارد می‌شود.



در رابطه‌ی مربوط به نیروها، هیچ ترمی به عنوان فاصله‌ی نیروها از نقطه‌ی مشخصی وجود ندارد، لذا می‌توان w مربوط به تک‌تک اجزای درخت را با یکدیگر جمع نمود و آن را W نامید. به این ترتیب رابطه‌ی زیر در مورد نیروهای خارجی وارد بر درخت برقرار است.

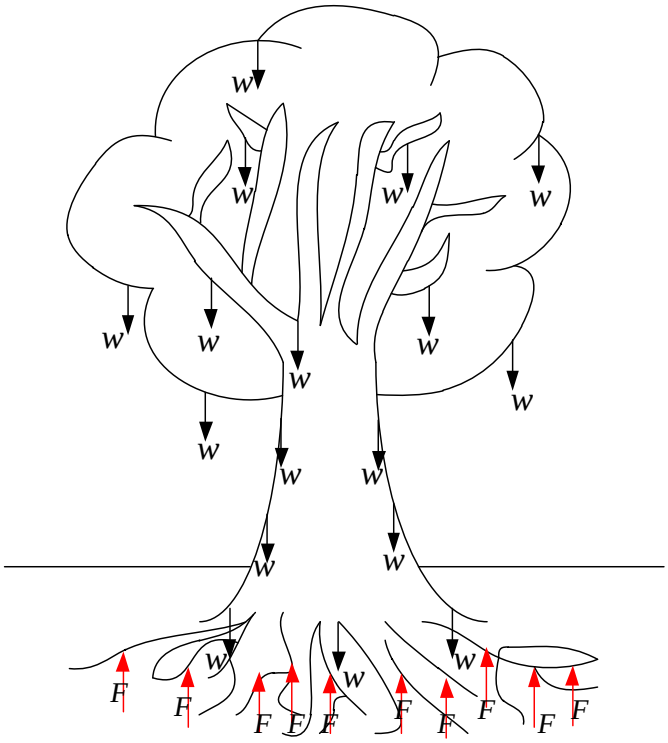
$$W + \sum F = M\ {}^{e}a_{C_m}$$

به دلیل اینکه درخت ساکن روی زمین ایستاده است، ${}^{e}a_{C_m}$ برای درخت صفر است. بنابراین داریم:

$$W + \sum F = 0$$

با توجه به ایستاده بودن درخت مشخص است که باید $\sum F$ای علیه W وجود داشته باشد که این درخت شتابی نداشته باشد.

اما این Fها از کجا ناشی می‌شوند؟ شاخ و برگ درخت که با جایی در تعامل نیستند. اما ریشه‌ی درخت با زمین در تماس است و از طرف زمین نیروهایی به این ریشه‌ها اعمال می‌شود. مجموع این نیروهای واردشونده از طرف زمین به ریشه‌ها را N می‌نامیم. بنابراین اندازه‌ی N باید با اندازه‌ی W برابر بوده ولی در خلاف جهت آن باشد. در حقیقت این N از طریق نیروهای درونی به کلیه‌ی ذرات درخت وارد می‌شود. ولی در تحلیل کلی که انجام داده بودیم نیروهای داخلی با یکدیگر حذف شدند و تنها در رابطه نیروهای خارجی باقی ماند.

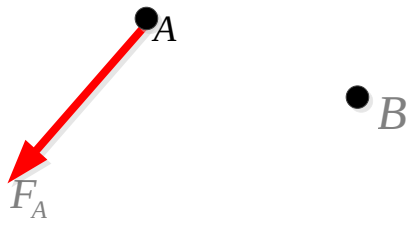


$${}^{e}\left(\sum \tau\right) = {}^{e}I_{C_m}\,{}^{e}\dot{\omega}_{eb}$$

$$\sum r_{C_m k} \times \omega_k + \sum r_{C_m j} \times N_j$$

گشتاور نیروهای وزن حول یک نقطه‌ای صفر شده و البته اگر wها همگی در یک راستا باشند، می‌توان براحتی نشان داد که این نقطه همان مرکز جرم است. و این یعنی مرکز وزن روی مرکز جرم به دست می‌آید.

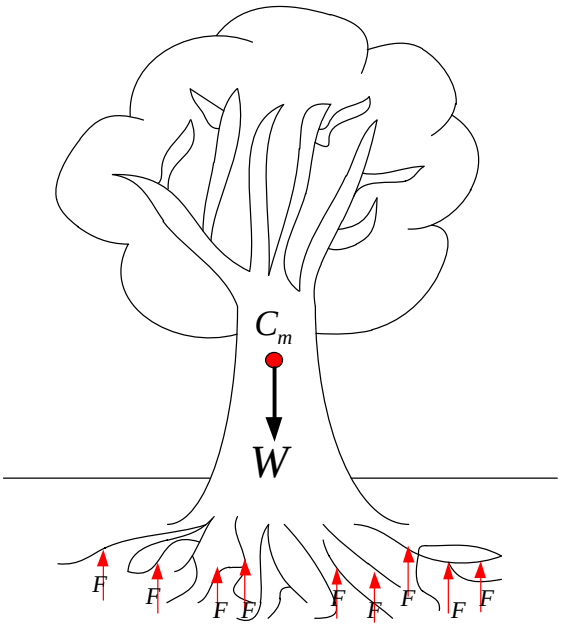
حال می‌خواهیم اصطلاحی را یاد بگیریم. اگر برآیند نیروها صفر نباشد، آن‌گاه همیشه می‌توان نقطه‌ای را پیدا کردکه گشتاور همه‌ی این نیروها نسبت به آن نقطه صفر باشد. آن نقطه را مرکز اثر آن نیروها یا مرکز نیروها می‌گویند. دلیل بوجود آمدن این اصطلاح نیز مشخص کردن وضعیت گشتاور حول آن نقطه و تمام نقاط دیگر است. وقتی گشتاور نیروی F حول نقطه‌ی A صفر باشد، آن نیرو را به صورت زیر نشان می‌دهند.



حال اگر گشتاور این نیرو را حول نقطه‌ای دیگر به نام B بخواهیم کافی است از رابطه‌ی زیر استفاده نماییم.

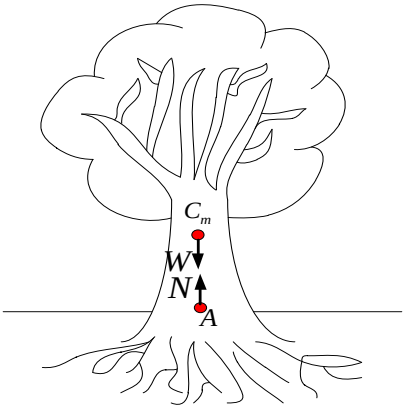
$$\tau_F \text{ حول B} = r_{BA} \times F_A$$

به دلیل اینکه نقطه اثر نیروی وزن همان مرکز جرم است، عادت کردیم آن را از مرکز جرم جسم رسم نماییم.



حال اگر گشتاور W را نسبت به هر نقطه‌ای به غیر از C_m بخواهیم می‌توانیم آن را به راحتی بدست آوریم.

به این ترتیب در رابطه‌ی قبل عبارت اول یعنی $\sum r_{C_m k} \times W_k$ صفر می‌شود و به دلیل اینکه هیچ دورانی نداریم عبارت دوم یعنی $\sum r_{C_m j} \times N_j$ نیز باید صفر شود. بنابراین مرکز اثر Nها یا مرکز جرم است یا جایی مانند A است که عبارت حاصلضرب خارجی $\sum r_{Aj} \times N_j$ صفر شود. مطابق شکل زیر می‌توانیم A را هم‌راستایِ W از C_m در جایی مناسب در نظر بگیریم.



حال اگر باد بوزد و درخت خم شود مرکز جرم درخت جابجا می‌شود. راستای W که تغییری نمی‌کند. به دلیل این‌که درخت دورانی پیدا نکرده و به حالت خم شده مانده است، باید مرکز اثر Nها نیز جابجا شود و به راستای C_m منتقل شود. برای این‌کار باید بیشتر نیروهای سازنده‌ی N جابجا شده و به سمت زیرِ C_m بروند(مطابق شکل زیر). اما این تحلیل بدونِ در نظر گرفتنِ نیرویِ باد است و لذا ناقص و نادرست است و در جلسهٔ بعدی خواهیم دید که حتی لازم است نقطهٔ اثرِ Nها از زیر C_m به طرف چپ‌تر نیز برود! حتماً جلسهٔ بعدی را ملاحظه کنید.